

デジタル信号処理 ~ 最適フィルタリング ~

y-nomura4

2011年9月23日

目次

1	概要	4
1.1	制御工学	4
1.2	制御理論	5
1.2.1	制御理論の分類	5
1.2.2	制御理論が扱う問題	5
1.3	信号処理	6
2	デジタルフィルタ	6
2.1	サンプリング定理	6
2.2	Laplace 変換と z -変換	6
2.3	伝達関数	6
2.4	インパルス応答	7
2.5	周波数応答	7
2.6	FIR フィルタ、IIR フィルタの設計	7
3	ウィーナーフィルタ	7
3.1	ウィーナーフィルタ	7
3.1.1	アルゴリズム	9
3.2	因果的ウィーナーフィルタ	9
3.3	適応フィルタ	9
3.3.1	最急降下法	9
3.3.2	LMS アルゴリズム	10
4	カルマンフィルタ	10
4.1	システムモデル	10
4.1.1	基本モデル	10
4.1.2	確率的仮定	11
4.1.3	モデルの性質	11
4.1.4	統計量の伝搬	11
4.2	最適推定	11
4.2.1	最大事後推定値	11
4.2.2	最小分散推定値	11
4.3	カルマンフィルタリング問題	11
4.3.1	カルマンフィルタ	12

4.3.2	1 段予測型カルマンフィルタ	12
4.3.3	線形最小分散フィルタ	13
4.3.4	複素カルマンフィルタ	13
4.3.5	外部入力を持つカルマンフィルタ	14
4.3.6	雑音が相関をもつカルマンフィルタ	15
4.3.7	拡張カルマンフィルタ	15
5	H_∞ フィルタ	16
6	適応フィルタのシステム同定への応用	16
6.1	システム同定	17
6.2	自働等化器	17
6.2.1	波形等化	17
6.2.2	シミュレーション	17
付録 A	Fourier 級数	17
付録 B	積分変換	17
B.1	Fourier 変換	18
B.2	Fourier 変換の性質	18
B.3	離散 Fourier 変換	18
B.4	ラプラス変換	18
B.5	z 変換	18
付録 C	確率論と確率過程	19
C.1	確率密度関数	19
C.2	種々の統計量	19
C.3	平均と共分散	19
C.4	確率ベクトルの独立性	19
C.5	条件付き確率	19
C.6	ガウス確率ベクトル	20
C.7	確率過程	20
C.8	定常過程とエルゴード性	20
C.9	Gauss 過程	20
C.10	Markov 過程	20
C.11	確率過程を入力とするパワースペクトル	21
付録 D	線形代数	21
D.1	ベクトル	21

D.2	行列	21
D.3	対称性	21
付録 E	状態空間	21
E.1	連続時間系から離散時間系への変換	21
E.1.1	連続時間系の状態空間モデル	21
E.2	離散時間系の伝達関数	22
E.3	可制御性と可観測性	22
付録 F	クライン空間における線形推定	22
F.1	群論	22
付録 G	数値計算	22
G.1	Excel によるデジタルフィルタのシミュレーション	22
G.2	LAPACK の利用	22

1 概要

適応フィルタはデジタルフィルタの一種であり、信号処理の一分野をなす。信号処理は光学信号、音声信号、電磁気信号などの様々な信号を数学的に加工するための学問・技術で、入力と出力が同じ種類（物理量）の信号の場合を特にフィルタリングと呼んでいる。このフィルタリングをより広い視点で見れば、入力信号から目的の信号を今回は具体的に外乱除去問題を取り上げ、ノイズに埋もれた信号から目的の情報が再現できる事を確かめる。

1.1 制御工学

入力および出力を持つシステムにおいて、その状態変数または出力を自由に制御する方法全般にかかわる学問分野を制御工学と言う。主にフィードバック制御を対象にした工学である。

大別すると、制御工学は、数理モデルに対して数学を応用する制御理論と、それを実モデルに適用していく制御応用とからなる。応用分野は機械系、電気系、化学プロセスが中心であるが、ものを操ることに関する問題が含まれていれば制御工学の対象となるため、広範な分野と関連がある。

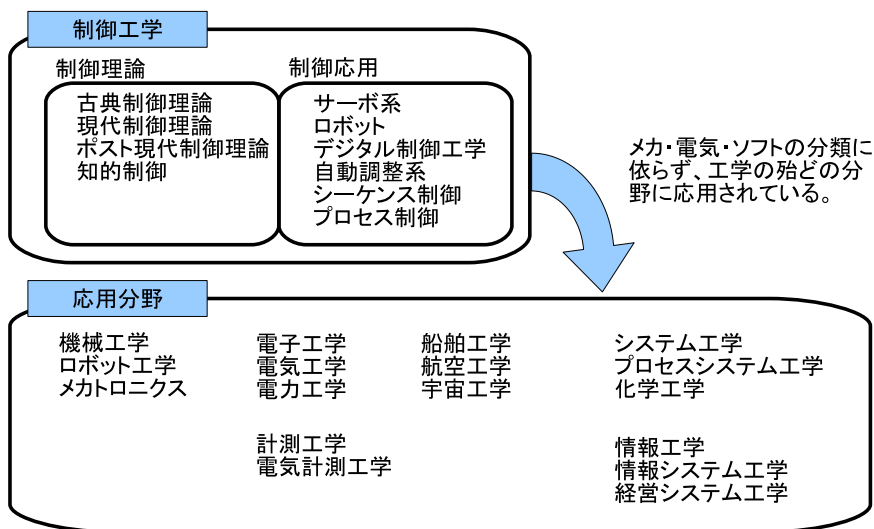


図 1 制御工学とその応用範囲

1.2 制御理論

制御工学の一分野で、数理モデルを対象とした、主に数学を用いた制御に関する理論である。いずれの理論も「モデル表現方法」「解析手法」「制御系設計手法」を与える。

1.2.1 制御理論の分類

古典制御理論

処理対象 線形微分方程式で表された系をラプラス変換し、伝達関数として記述する。1入力1出力時不変線形システム。

扱う変数 考察する対象の入力変数と出力変数。

設計手法

現代制御

ポスト現代制御

- 最適フィルタリング
- ロバスト制御

知的制御

- ファジー制御
- ニューラルネットワーク制御
- 遺伝的アルゴリズム
- エキスパートシステム

アナログ・デジタル

1.2.2 制御理論が扱う問題

制御理論の対象となる問題は以下のような状況が考えらる。

安定化問題

不安定な制御対象をフィードバック制御により安定化する (cf. 倒立振り子)

感度低減問題

制御対象の特性の変動により引き起こされる制御システムの特性劣化を小さくする (cf.)

トラッキング問題

目標信号に制御量を追従させる (cf. サーボ制御)

外乱除去問題

外乱から制御量への伝達特性を小さくする (cf. ノイズフィルタ)

レギュレータ問題

平衡状態にある制御量の変動を出来る限り小さくする (cf. 安定化電源)

1.3 信号処理

信号処理は光学信号、音声信号、電磁気信号などの様々な信号を数学的に加工するための学問・技術で、入力と出力が同じ種類 (物理量) の信号の場合を特にフィルタリングと呼んでいる。

2 デジタルフィルタ

アナログフィルタは抵抗、コンデンサ、コイル等で構成されるため、特性のバラつきや温度変化等に影響を受ける。また、アナログ信号なのでノイズの影響も無視できない。

デジタルフィルタでは、A/D 変換器にて標準化および量子化したデジタル信号に対して

2.1 サンプリング定理

標本化定理 (sampling theorem) は情報理論分野で、非常に重要な定理として知られており、アナログ信号をデジタル信号へと変換する際に、どの程度の間隔で標本化 (サンプリング) すればよいかを定量的に表すものである。サンプリング定理、ナイキスト定理、ナイキスト・シャノンの定理、シャノン・染谷の定理とも呼ばれる。

サンプリング周波数 f_s の半分の周波数の信号までを再現できる。それ以上の周波数が含まれる場合にはエイリアシングが発生する。これを防ぐために LPF で $f_s/2$ 以上の周波数を低減する。

2.2 Laplace 変換と z-変換

関数解析学において、ラプラス変換 (Laplace transform) とは、積分で定義される関数空間の間の写像 (線型作用素) の一種である。

ラプラス変換によりある種の微分・積分は積などの代数的な演算に置き換わるため、制御工学などにおいて時間の (とくに超越的な) 関数を別の (おもに代数的な) 関数に変換することにより、計算の見通しをたてるための便法として用いられる。

z 変換は離散群上でのラプラス変換とも呼ばれるもので、ローラン展開をベースにした関数空間の間の線形作用素である。

2.3 伝達関数

伝達関数 (transfer function) とはシステムへの入力を出力に変換する関数のことをいう。伝達関数はすべての初期値を 0 とおいたときの制御系の出力と入力のラプラス変換 (または z 変換) の

表1 Wienerフィルタの一般的な実現状況。ここで s_n は観測系列に含まれる信号系列、 v_n は雑音系列を表す。

問題	入力信号 x_n	所望信号 d_n
雑音中の信号のフィルタリング	$s_n + v_n$	s_n
雑音中の信号の予測	$s_n + v_n$	s_{n+p} $p > 0$
雑音中の信号の平滑化	$s_n + v_n$	s_{n-q} $q > 0$
線形予測	s_{n-1}	s_n
一般非線形問題	$G(s_n, v_n)$	s_n

比で表される。

2.4 インパルス応答

2.5 周波数応答

2.6 FIR フィルタ、IIR フィルタの設計

3 ウィーナーフィルタ

3.1 ウィーナーフィルタ

線形フィルタの出力 \hat{d}_k は入力信号 $\{x_k\}$ とインパルス応答 $\{h_i\}$ の畳み込み (convolution) を用いて次のように書ける。

$$\hat{d}_k = h_k * x_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i x_{k-i}, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |h_i| < \infty \quad (1)$$

つまり、線形フィルタの特性はインパルス応答 $\{h_i\}$ が決めている。ここで、インパルス応答 h_i を z 変換した物は伝達関数 (transfer function) を表す。

$$H(z) = \sum_k h(k) \cdot z^{-k} \quad (2)$$

Wiener フィルタは所望の信号 d_k との平均 2 乗誤差

$$J = E\{(d_k - \hat{d}_k)^2\} \quad \left(= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} (d_k - \hat{d}_k)^2 \right) \quad (3)$$

を最小にする最適推定値 \hat{d}_k を出力するフィルタである。Wiener フィルタにおいて入力信号と所望の信号にそれぞれ何を想定するかで表 1 のように様々な働きを持ったフィルタが構成できる。

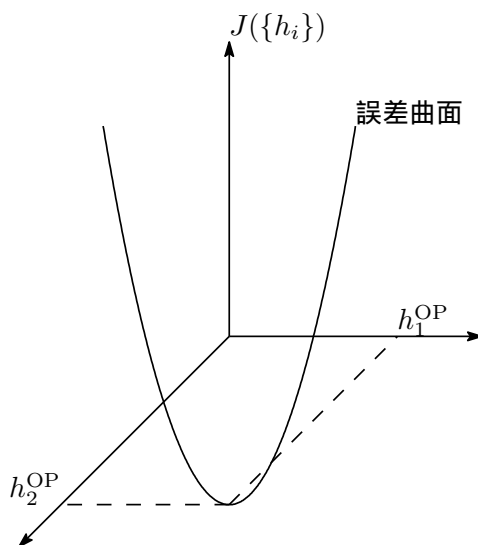


図2 平均二乗誤差 J の最小値。

例えば、入力信号は源信号とノイズの和

$$x_n = s_n + v_n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

で表すと図3のようなブロック図が書ける。

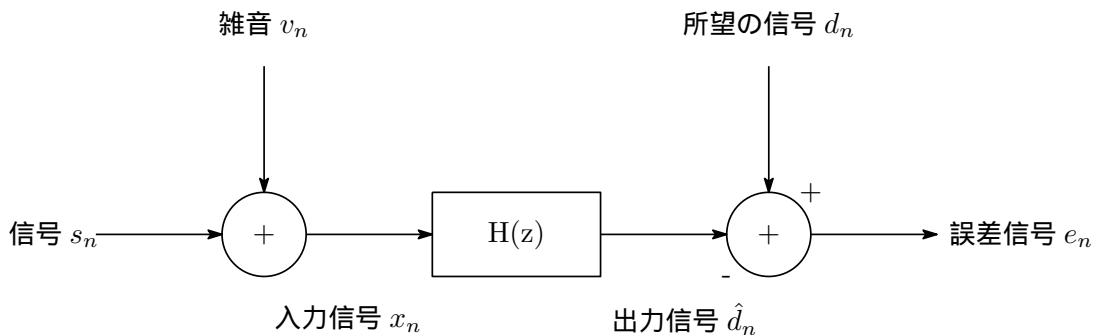


図3 Wiener フィルタの構成例。ここでは雑音中の信号のフィルタリングする場合を示す。

以上より、Wiener フィルタの設計問題は式(3)を最小にするインパルス応答 $\{h_i\}$ を探すことであり、最小値の求め方によりいくつかのアルゴリズムが提案されている。

最終的に次の相関関数に関する Wiener-Hopf 方程式として表される。

$$R_{dy}[m] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^{\text{OP}} r_{yy}[m-i] = h_i^{\text{OP}} * r_{yy}[m], \quad m \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

この方程式を満たす解 (Wiener 解) をインパルス応答

- $\frac{\partial J(\{h_i\})}{\partial h_m} = 0$ となる $\{h_i\}$ を求める
- 最急降下法により反復的に求める
- LMS アルゴリズム

3.1.1 アルゴリズム

3.2 因果的ウィーナーフィルタ

ウィーナーフィルタは過去から未来に至るまでのすべての入力データ $\{y_{-\infty}, \dots, y_k, \dots, y_{\infty}\}$ を必要としている。ところが、未来のデータを知ることは出来ないため、過去から現在までのデータ $\{y_{-\infty}, \dots, y_k\}$ を用いて所望信号 d_k の最適推定値 \hat{d}_k を求めなければならない。

$$\hat{d}_k = \sum_{i=0}^{\infty} h_i^{op} y_{k-i} \quad h_i = 0, i < 0 \quad (6)$$

最終的に次の相関関数に関する Wiener-Hopf 方程式として表される。

$$R_{dy}[m] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i^{op} r_{yy}[m-i] = h_i^{op} * r_{yy}[m], \quad m \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

3.3 適応フィルタ

因果的ウィーナーフィルタ（近似解）では、信号の統計量（相関関数）を事前に求める必要があるため、実時間処理には適さない。また、信号の統計量が設計段階と異なると、そのフィルタ係数は最適ではなくなる。

そこで、フィルタ係数がある初期値から適応的に少しずつ自己調整し、最終的に最適フィルタを実現するフィルタが考案された。このようなフィルタ係数の自己調整機能（適応アルゴリズム）を持ったデジタルフィルタを適応フィルタ（adaptive filter）と呼ぶ。

3.3.1 最急降下法

ここでは時間のかかる逆行列の計算などの代わりに、適当な初期値から出発し、最急降下法を用いて反復的に最小値を求める。

平均 2 乗誤差 $J(\{h_i\})$ は最小値 J_{min} を用いて次のように表現できる。

$$J = J_{min} + (\hat{\mathbf{h}}_k - \mathbf{h}_{op})^T \mathbf{R}_{yy} (\hat{\mathbf{h}}_k - \mathbf{h}_{op}) \quad (8)$$

これより平均 2 乗誤差 $J(\{h_i\})$ は単峰性だと分かる。よって最急降下方向 $-\nabla J(\hat{\mathbf{h}}_k)$ に反復的に係数 $\{h_i\}$ を更新していけばいずれ Wiener 解 $\{h_i^{op}\}$ に収束すると考えられる。

そこで、フィルタ係数 $\hat{\mathbf{h}}_k$ をある初期値 $\hat{\mathbf{h}}_0$ から次の漸化式に従って更新する。

$$\hat{\mathbf{h}}_{k+1} = \hat{\mathbf{h}}_k - c \nabla J(\{h_i\}) \quad (9)$$

この計算には逆行列の計算が含まれない。ここで c はステップサイズを表し、更新による修正量を決定する。

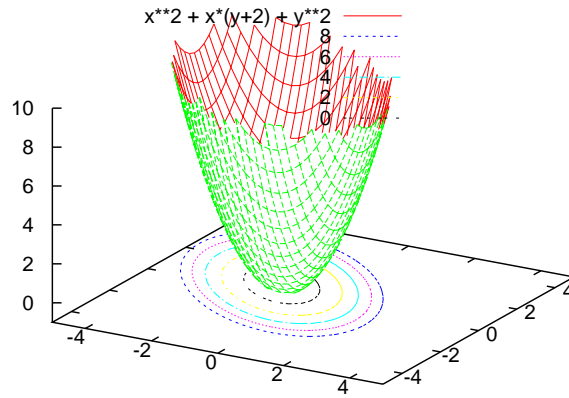


図4 最急降下法

3.3.2 LMS アルゴリズム

最急降下法を用いて逆行列の計算を省くことに成功した。LMS アルゴリズム (Least Mean Square algorithm) ではさらに期待値演算を除いた勾配を用いる。これは最急降下法における勾配を瞬時値で置換した方法と解釈できる。

LMS アルゴリズムでは最急降下法で用いた勾配 $-\nabla J(\hat{\mathbf{h}}_k)$ に代わって期待値演算を除いた次の勾配を用いる。

$$\nabla J'(\{h_i\}) = \frac{\partial e^2}{\partial \hat{\mathbf{h}}_k} = -2e_k \mathbf{y}_k, \quad e_k = d_k - \hat{d}_k = d_k - \mathbf{y}_k^T \hat{\mathbf{h}}_k \quad (10)$$

大胆な扱いだが、その平均値 (期待値) は最急降下法の勾配と一致し、フィルタ係数の期待値は最終的に Wiener 解と一致する。

4 カルマンフィルタ

Wiener フィルタ

4.1 システムモデル

4.1.1 基本モデル

状態方程式と観測方程式。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad k \geq 0 \quad (12)$$

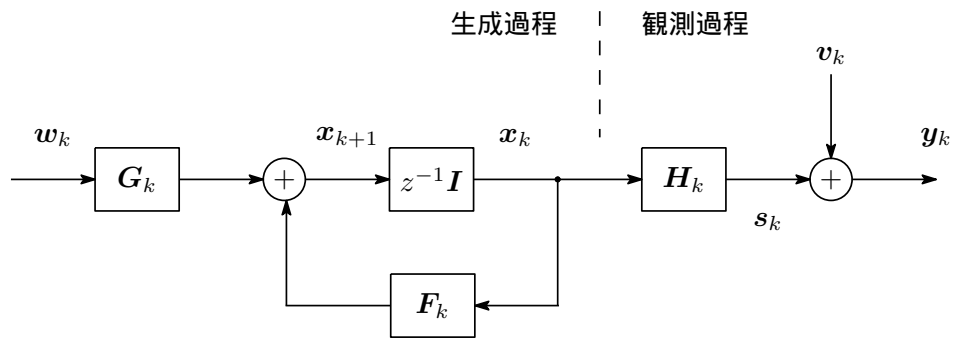


図 5 状態空間モデルのブロック線図。

4.1.2 確率的仮定

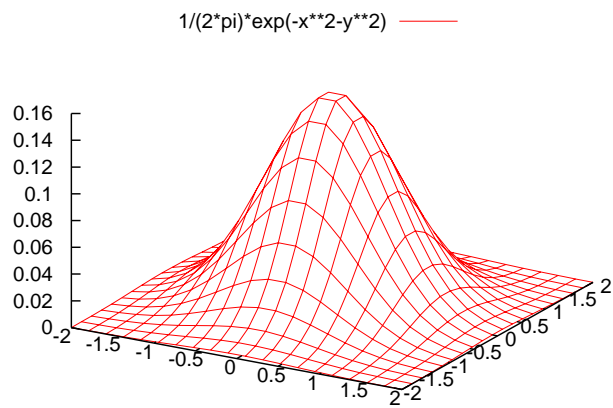


図 6 2次元の Gauss 分布の例

4.1.3 モデルの性質

4.1.4 統計量の伝搬

4.2 最適推定

4.2.1 最大事後推定値

4.2.2 最小分散推定値

4.3 カルマンフィルタリング問題

観測値 y_0, \dots, y_k が与えられた時の x_k の最小分散推定値 $\hat{x}_{k|k} = E\{x_k | y_0, \dots, y_k\}$ または $\hat{x}_{k|k-1} = E\{x_k | y_0, \dots, y_{k-1}\}$ を求める問題をカルマンフィルタリング問題カルマンフィルタリ

ング問題 (Kalman filtering problem) と言い、その解を与えるアルゴリズムをカルマンフィルタ (Kalman filter) と呼ぶ。

4.3.1 カルマンフィルタ フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (14)$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{\mathbf{v}_k})^{-1} \quad (15)$$

誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\Sigma}_{k|k} = \hat{\Sigma}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \quad (16)$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\Sigma}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \Sigma_{\mathbf{w}_k} \mathbf{G}_k^T \quad (17)$$

初期値

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{\mathbf{x}_0} \quad (18)$$

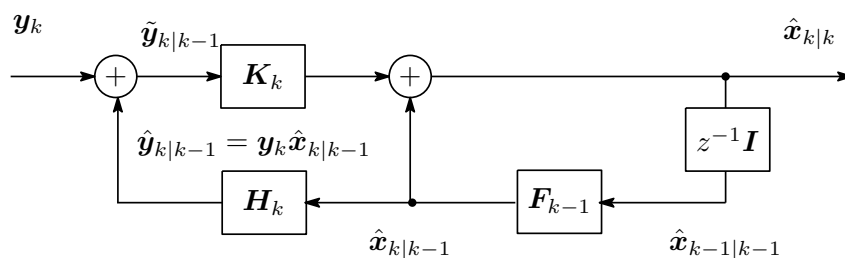


図7 Kalman フィルタのブロック線図。

4.3.2 1 段予測型カルマンフィルタ

カルマンフィルタの1 段予測値 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ に関して整理しなおすと次のようにまとめられる。

フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = (\mathbf{F}_k - \mathbf{L}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{L}_k \mathbf{y}_k \quad (19)$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{F}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{\mathbf{v}_k})^{-1} \quad (20)$$

誤差の共分散行列方程式

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{k+1|k} &= \mathbf{F}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{F}_k^T \\ &\quad - \mathbf{F}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{\mathbf{v}_k})^{-1} \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{F}_k^T \\ &\quad + \mathbf{G}_k \hat{\Sigma}_{\mathbf{w}_k} \mathbf{G}_k^T \end{aligned} \quad (21)$$

初期値

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{\mathbf{x}_0} \quad (22)$$

1 段予測型 Kalman フィルタと Kalman フィルタは等価であり、 $L_k = F_k K_k$ の関係がある。

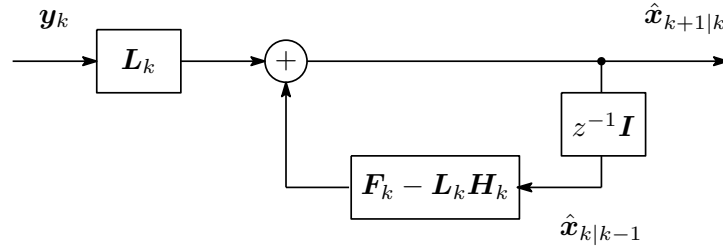


図 8 1 段予測型 Kalman フィルタのブロック線図。

4.3.3 線形最小分散フィルタ

源信号 x_k と観測信号 $\{y_k\}$ が結合 Gauss 性であるとき、Kalman フィルタは非線形フィルタも含めて、あらゆるフィルタの中で最も最適なフィルタであった。しかし、現実の問題では Gauss 性の仮定は必ずしも保証されない。そこで、非 Gauss 性の場合への拡張を行う。

フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (24)$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{\mathbf{v}_k})^{-1} \quad (25)$$

誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\Sigma}_{k|k} = \hat{\Sigma}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \quad (26)$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\Sigma}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \Sigma_{\mathbf{w}_k} \mathbf{G}_k^T \quad (27)$$

初期値

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{\mathbf{x}_0} \quad (28)$$

Kalman フィルタを導入した際には Gauss 性を仮定してフィルタを構築したが、Gauss 性の無い場合にもそのまま成り立つ事が分かった。ただし、Gauss 性でない場合の Kalman フィルタは、あらゆるフィルタの中で最も最適なフィルタであるとは限らない。

4.3.4 複素カルマンフィルタ

データ通信や計測分野などへの応用では、システムの状態空間モデルは複素数で定義した方が都合がよい。そこで、Kalman フィルタを複素数へ拡張する。

ここで、入力信号には Gauss 性に代わって複素 Gauss 性

$$p_x(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N |\boldsymbol{\Sigma}_x|} \exp \{ -(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\dagger \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \} \quad (29)$$

を仮定する。

フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (30)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (31)$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\dagger (\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^\dagger + \boldsymbol{\Sigma}_{v_k})^{-1} \quad (32)$$

誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \quad (33)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} \mathbf{F}_k^\dagger + \mathbf{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_{w_k} \mathbf{G}_k^\dagger \quad (34)$$

初期値

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0|-1} = \boldsymbol{\Sigma}_{x_0} \quad (35)$$

通常のカルマンフィルタとの違いは各ベクトルと行列の成分が複素数になっている事だけである。そのため転置行列はエルミート行列で置き換えた。

4.3.5 外部入力を持つカルマンフィルタ

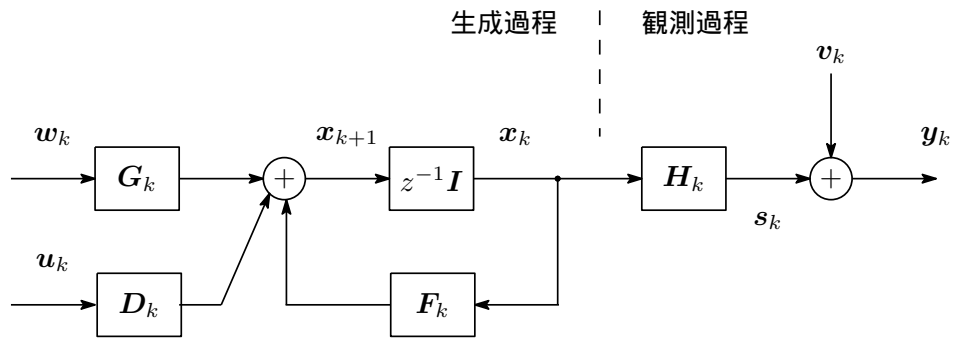


図9 外部入力を持つ状態空間のブロック線図。

フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (36)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k \quad (37)$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_{v_k})^{-1} \quad (38)$$

誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\Sigma}_{k|k} = \hat{\Sigma}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \quad (39)$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\Sigma}_{k|k} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \Sigma_{\mathbf{w}_k} \mathbf{G}_k^T \quad (40)$$

初期値

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{\mathbf{x}_0} \quad (41)$$

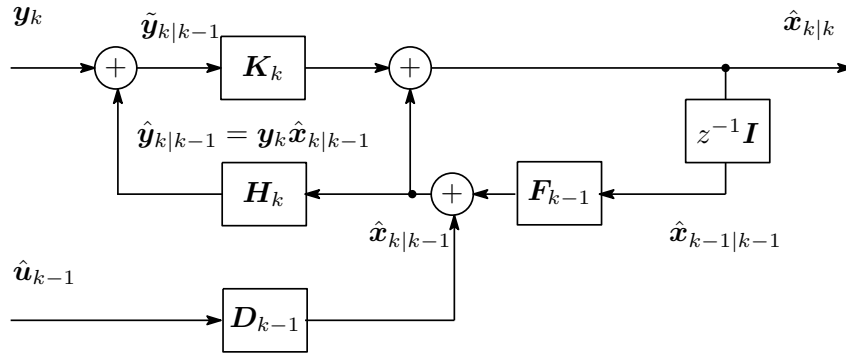


図 10 外部入力を持つ Kalman フィルタのブロック線図。

4.3.6 雑音が相関をもつカルマンフィルタ

フィルタ方程式

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = (\mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k \Sigma_{\mathbf{v}_k}^{-1} \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k \Sigma_{\mathbf{v}_k}^{-1} \mathbf{y}_k \quad (43)$$

カルマンゲイン

$$\mathbf{K}_k = \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_{\mathbf{v}_k})^{-1} \quad (44)$$

誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\Sigma}_{k|k} = \hat{\Sigma}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \hat{\Sigma}_{k|k-1} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{k+1|k} = & (\mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k \Sigma_{\mathbf{v}_k}^{-1} \mathbf{H}_k) \hat{\Sigma}_{k|k} (\mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{S}_k \Sigma_{\mathbf{v}_k}^{-1} \mathbf{H}_k)^T \\ & + \mathbf{G}_k (\Sigma_{\mathbf{v}_k} - \mathbf{S}_k \Sigma_{\mathbf{v}_k}^{-1} \mathbf{S}_k^T) \mathbf{G}_k^T \end{aligned} \quad (46)$$

初期値

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|-1} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_{\mathbf{x}_0} \quad (47)$$

4.3.7 拡張カルマンフィルタ

非線形確率システムに対する準最適フィルタ。

フィルタ方程式

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{h}_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) \quad (48)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{f}_k(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k}) \quad (49)$$

カルマンゲイン

$$\boldsymbol{K}_k = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_k^T (\boldsymbol{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{v}_k})^{-1} \quad (50)$$

誤差の共分散行列方程式

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \quad (51)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k+1|k} = \boldsymbol{F}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} \boldsymbol{F}_k^T + \boldsymbol{G}_k \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{w}_k} \boldsymbol{G}_k^T \quad (52)$$

初期値

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{0|-1} = \bar{\boldsymbol{x}}_0, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{0|-1} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}_0} \quad (53)$$

5 H_∞ フィルタ

H_∞ フィルタは未知外乱からフィルタ誤差への伝達行列の H_∞ ノルム、または予測誤差への伝達行列の H_∞ を最小にするフィルタである。

$$\|\boldsymbol{T}\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{u} \in l_2, \boldsymbol{u} \neq 0} \frac{\|\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}\|_2}{\|\boldsymbol{u}\|_2} \quad (54)$$

このフィルタは最悪外乱に対する推定誤差を最小にするので、雑音の特性の変化やモデル誤差などに対してロバスト（頑強）である事が知られている。

6 適応フィルタのシステム同定への応用

システム同定 (System Identification) は、計測データから動的モデルを構築するための数学的ツールやアルゴリズムを指す用語である。動的モデルとはシステムやプロセス（過程）の動的振る舞いに関する数学的記述を意味する。例えば、次のようなものが含まれる：

- 重力によって物体が落下する物理的過程
- 外的要因に証券市場が反応するような経済的過程

適応フィルタの代表的な応用例として国際通信におけるエコーキャンセラ、データ通信における自動等化器、拡散通話系における音響エコーキャンセラ、および自動車などにおけるアクティブ騒音制御などがある。

6.1 システム同定

6.2 自動等化器

6.2.1 波形等化

長い伝送路を信号が伝搬すると波形が崩れて正しく読みだせなくなる。そこで波形を元に戻すフィルタを取り付ける。この波形を元に戻す操作を等化という。この時のフィルタは伝送路の特性をちょうど打ち消すようなフィルタ特性を持っている。

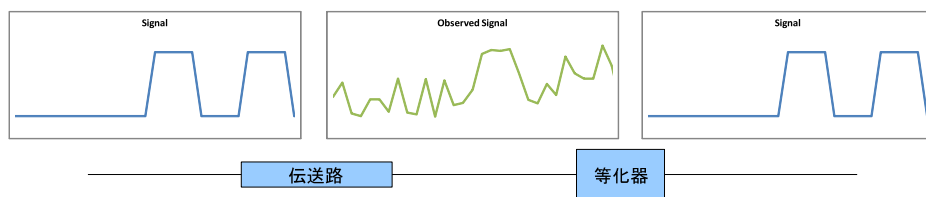


図 11 波形等化のイメージ

6.2.2 シミュレーション

ここでは実装が簡単な LMS アルゴリズムを採用した。

付録 A Fourier 級数

Fourier によれば、あらゆる関数は次のような三角関数の和で記述できるという。

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t\} \quad (55)$$

ここで

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt, \quad A_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (56)$$

$$B_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (57)$$

付録 B 積分変換

ある関数 $f(x)$ に対して、積分を用いて次のような変換を考える。

$$g(t) = \int_a^b K(x, t) f(x) dx \quad (58)$$

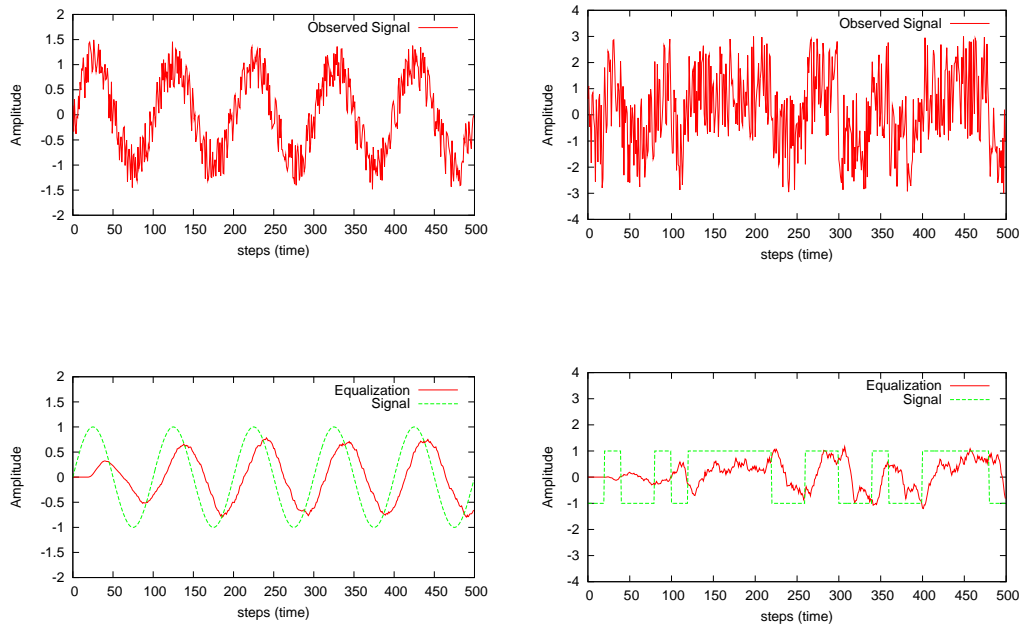


図 12 This is sample figures.

このような変換を一般に積分変換と呼び、 $K(x, t)$ をこの核 (kernel) と呼ぶ。核に選ぶ関数によって様々な特性を持った変換が実現できる。

B.1 Fourier 変換

核 $K(x, t)$ として $e^{-i\omega t}$ を選ぶと Fourier 変換となる。

B.2 Fourier 変換の性質

B.3 離散 Fourier 変換

B.4 ラプラス変換

核 $K(x, t)$ として e^{-st} を選ぶとラプラス変換となる。

B.5 z 変換

z 変換は離散群上でのラプラス変換とも呼ばれるもので、ローラン展開をベースにした関数空間の間の線形作用素である。

両側 z 変換

$$Z[x_n] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (59)$$

片側 z 変換

$$Z[x_n] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (60)$$

付録 C 確率論と確率過程

C.1 確率密度関数

C.2 種々の統計量

- 期待値 (expectation)

$$E_x[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) p_x(\xi) d\xi \quad (61)$$

- 平均 (average, mean value)

$$\bar{x} = E_x[x] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p_x(\xi) d\xi \quad (62)$$

- 分散 (variance)

$$\sigma_x^2 = E_x[(x - \bar{x})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{x})^2 p_x(\xi) d\xi \quad (63)$$

- 標準偏差 (standard deviation) σ_x

- モーメント (moment)

$$E_x[x^m] = (-i)^m \left. \frac{d^m \phi_x(\zeta)}{d\zeta^m} \right|_{z=0} = (-i)^m \phi_x^{(m)}(0) \quad (64)$$

C.3 平均と共分散

C.4 確率ベクトルの独立性

C.5 条件付き確率

条件付き確率 (Conditional probability) とは、ある事象 B が起こるとい条件の下で別の事象 A の確率をいい、これを $P(A|B)$ または $P_A(B)$ と書く。

C.6 ガウス確率ベクトル

C.7 確率過程

C.8 定常過程とエルゴード性

エルゴード過程 (ergodic process) の基本的な考え方は集合平均 (ensemble average) を時間平均 (time average) で置き換える事である。定常過程 $\{x_k\}$ から任意の関数を用いて得られる新たな過程 $\{f(x_k)\}$ の平均過程がその一つの標本過程 $\{f(\xi_k)\}$ によって

$$E_{\mathbf{x}_k}[f(\mathbf{x}_k)] = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L}^L f(\xi_{k+i}) \quad (65)$$

と表わせる時、 $\{x_k\}$ はエルゴード性 (ergodicity) を持つという。また、時間平均と集合平均が等しい過程をエルゴード過程という。

C.9 Gauss 過程

確率過程 x_k において、任意の k と m に対して x_k, \dots, x_{k+m} の結合確率密度関数が存在し、かつ Gauss 分布

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N |\Sigma_{\mathbf{x}}|} \exp \{ -(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^{\dagger} \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \} \quad (66)$$

であれば、 $\{x_k\}$ を Gauss 過程と呼ぶ。

C.10 Markov 過程

時刻 t_k における x_k が一つ前の時刻の状態 x_{k-1} だけに依存し、それ以上前の状態 x_0, \dots, x_{k-2} には無関係

$$p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k-1}}(\xi_k | \xi_0, \dots, \xi_{k-1}) = p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}}(\xi_k | \xi_{k-1}) \quad (67)$$

であるとき、確率過程 $\{x_k\}$ を 1 次の Markov 過程と呼ぶ。結合確率密度関数は Bayes の定理より

$$p_{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k}(\xi_0, \dots, \xi_k) = p_{\mathbf{x}_0}(\xi_0) p_{\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_0}(\xi_1 | \xi_0) \cdots p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}}(\xi_k | \xi_{k-1}) \quad (68)$$

と表される。また、2 次の Markov 過程は

$$p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k-1}}(\xi_k | \xi_0, \dots, \xi_{k-1}) = p_{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-2}, \mathbf{x}_{k-1}}(\xi_k | \xi_{k-2}, \xi_{k-1}) \quad (69)$$

で定義され、高次の Markov 過程も同様に定義できる。

C.11 確率過程を入力とするパワースペクトル

付録 D 線形代数

D.1 ベクトル

D.2 行列

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (70)$$

D.3 対称性

- 対称行列 (symmetric matrix)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (71)$$

- 歪対称行列 (skew-symmetric matrix) , 交代行列 (alternative matrix)

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad (72)$$

- エルミート行列 (Hermite matrix)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger \quad (73)$$

- 歪エルミート行列 (skew-Hermite matrix)

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^\dagger \quad (74)$$

- ユニタリー行列

$$\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad (75)$$

付録 E 状態空間

状態空間 (State Space) あるいは状態空間表現 (State Space Representation) は、制御工学において、物理的システムを入力、出力、状態変数の一階連立微分方程式で表した数学的モデルである。

E.1 連続時間系から離散時間系への変換

E.1.1 連続時間系の状態空間モデル

状態方程式

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_c u(t) \quad (76)$$

出力方程式

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) \quad (77)$$

E.2 離散時間系の伝達関数

E.3 可制御性と可観測性

付録 F クライン空間における線形推定

F.1 群論

群・環・体

付録 G 数値計算

G.1 Excel によるデジタルフィルタのシミュレーション

FIR フィルタの計算式

G.2 LAPACK の利用

数値計算用ライブラリ LAPACK (Linear Algebra PACKage)

参考文献

[1] 西山 清, 『最適フィルタリング (システム制御シリーズ)』, 培風館, 2001

索引

L

LAPACK.....	22
LMS アルゴリズム	10

あ

アクティブ騒音制御	16
インパルス応答	7
Wiener フィルタ	7
エコーキャンセラ	16
エルゴード過程	20
エルゴード性	20
エルミート行列	14, 21
音響エコーキャンセラ	16

か

解析手法	5
核	18
拡散電話系	16
カルマンフィルタ	12
カルマンフィルタリング問題	12
期待値	19
交代行列	21

さ

最急降下法	10
時間平均	20
自動等化器	16
集合平均	20
状態空間	21
状態空間表現	21
状態変数	21
数理モデル	4
制御応用	4
制御系設計手法	5
制御工学	4
制御理論	4
線形フィルタ	7

た

対称行列	21
畳み込み	7
定常過程	20
データ通信	16
伝達関数	7

は

標準偏差	19
フィードバック制御	4
分散	19
平均	19

ま

モデル表現方法	5
モーメント	19

や

ユニタリー行列	21
---------------	----

ら

ラプラス変換	6, 18
ローラン展開	6, 18

わ

歪エルミート行列	21
歪対称行列	21