数学の基礎

n.u-ki

2005 年 10 月 22 日

物理を学習するのに必要な数学として「微分積分学」や「線形代数学」を学習する必要があるが、ここではそれらの章で述べられなかった基本的な事柄を扱う。これらの内容の多くは高校での数学の復習になる。

1 部分分数分解 (無し)

2 極限とは (無し)

3 簡単な極限 (無し)

4 数列とは (無し)

5 簡単な数列 (無し)

6 階差数列 (無し)

7 級数/和の公式

8 群数列 (無し)

9 物の数え方と並べ方（順列と組み合わせ）(無し)

10 二項係数 (無し)

11 特集！三角形 (工事中)

12　暗記しない三角関数公式集

三角関数の公式は教科書に沢山載っていて暗記するのはとても大変である。「咲いたコスモスコスモス咲いた」などと言った早覚えも有るが、忘れてしまえばそれまでで、とても賢い方法とは言えない。ここでは最小限の知識からスタートして多くの公式を導く事にしよう。

以下では幾つかの問題を設定し、多くの三角関数公式を導いていこう。現実的には三角関数の定義と加法定理を知っていれば十分である。これらから様々な公式を導く事が可能。

12.1　問題

A. まずは三角関数を定義し、加法定理を導こう。

1. 三角関数の定義を述べよ。また、
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{12.1}$$
を示せ。
2. 式 (12.1) から $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を導け。
3. 絶対値が 1 で偏角が θ_1 である複素数 z_1 を θ_2 だけ回転した点を z_2 とする。すると
$$z_2 = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$
と表される。一方、z_2 は z_1 を θ_2 だけ回転した点なので
$$z_2 = z_1(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
とも表せる。これを計算し、加法定理
$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{12.2}$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 \tag{12.3}$$
$$\cos(\theta_1-\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{12.4}$$
$$\sin(\theta_1-\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 \tag{12.5}$$
を導け。

B. 次に加法定理から様々な公式を導いていく。

1. 2 倍角の公式を導出せよ。
2. 2 倍角の公式より、半角の公式を導出せよ。
3. 和から積への変換公式を導出せよ。
4. 積から和への変換公式を導出せよ。
5. 三角関数の合成公式を導出せよ。
6. 3 倍角の公式を導出せよ。

7. ド・モアブルの定理 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ を使うと n 倍角の公式が導ける。これを用いて 2 倍角の公式と 3 倍角の公式を導け。ここで n は整数である。[*1]

12.2 問題の解法と公式の導出

A. 1. 先ず、始めに三角関数を定義する。∠AOB が θ の直角三角形 AOB を考える。この時の三角関数の定義は

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} \tag{12.6}$$

となる。しかしこの定義では $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲でしか使えない。そこで、点 O を中心とし、点 A を通る円を考える。そしてこの円周上を点 A が動くものとする。すると任意の θ で三角関数が定義できる。[*2]

次に $\mathrm{OA} = 1$ とすると三平方の定理より $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ が示せる。この関係式は sin と cos を相互に変換する時に良く使う。

2. 式 (12.1) の両辺を $\cos^2\theta$ で割れば求める式 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ になる。

3. 計算すると

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \end{aligned} \tag{12.7}$$

となる。それと $z_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$ の実部と虚部を比較すると式 (12.2)、式 (12.3) が求まる。

次に、θ_2 を $-\theta_2$ で置き換えると式 (12.4)、式 (12.5) が得られる。[*3]

B. 1. 式 (12.2), 式 (12.3) で $\theta_1 = \theta_2 = x$ と置くと

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \tag{12.8}$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \tag{12.9}$$

となり、これが 2 倍角の公式である。

2. 2 倍角の公式 (12.8) で式 (12.1) を使うと

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \tag{12.10}$$
$$= 1 - 2\sin^2 x \tag{12.11}$$

[*1] 平成 17 年現在、高校の学習指導要領では複素数平面は範囲外だそうだ。それでも上の式を認めれば計算は出来る。
[*2] この様な定義をすると三角関数と呼ぶよりは円関数と呼んだ方が良いかもしれない。
[*3] この公式を得るのには幾何学的な方法もある。そちらから求めるのが筋かもしれないが、少し考え難いのでここではこちらを採用した。

と変形できる。これを整理するとそれぞれ

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \tag{12.12}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \tag{12.13}$$

が得られる。ここで $\alpha = 2x$ の置き換えをすれば

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \tag{12.14}$$
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{12.15}$$

となり、お馴染みの半角の公式が得られる。

3. これは加法定理の４つの式を適当に組み合わせる事で得られる。

$$\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2) = 2\sin\theta_1\cos\theta_2 \tag{12.16}$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_2) = 2\cos\theta_1\sin\theta_2 \tag{12.17}$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2) = 2\cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{12.18}$$
$$\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos(\theta_1-\theta_2) = -2\sin\theta_1\sin\theta_2 \tag{12.19}$$

この式が和から積・積から和への変換公式その物だと思っても差し支えない。ここで見慣れた形に書き換えてみよう。

$$A = \theta_1+\theta_2 \quad , \quad B = \theta_1-\theta_2$$

と置くと上の式はそれぞれ

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{12.20}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \tag{12.21}$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{12.22}$$
$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \tag{12.23}$$

と書き換えられる。これが和から積への変換公式である。

4. 上の式 (12.16)〜式 (12.19) をそのまま使えば良い。

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\} \tag{12.24}$$
$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\} \tag{12.25}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\} \tag{12.26}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\} \tag{12.27}$$

ここで文字は適当に置き換えた。これが積から和への変換公式である。

5. 三角関数の合成公式を導出する。

$$a\cos\theta + a\sin\theta = r\left(\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{b}{r}\sin\theta\right)$$

と変形する。ここで $r = \sqrt{a^2+b^2}$ と置いた。ここで

$$\sin\alpha = \frac{a}{r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{b}{r}$$

と置くと上の式は

$$\begin{aligned} a\cos\theta + a\sin\theta &= r\left(\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{b}{r}\sin\theta\right) \\ &= r\left(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta\right) \\ &= r\sin(\theta+\alpha) \end{aligned} \tag{12.28}$$

となり合成公式が導けた。ここで最後の変形は加法定理の式 (12.3) を用いた。 この公式は良く用いられる。また、

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{b}{r}$$

と置くと上の式は

$$\begin{aligned} a\cos\theta + a\sin\theta &= r\left(\frac{a}{r}\cos\theta + \frac{b}{r}\sin\theta\right) \\ &= r\left(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta\right) \\ &= r\cos(\theta-\alpha) \end{aligned} \tag{12.29}$$

とも書ける。ここで最後の変形は加法定理の式 (12.4) を用いた。

6. 加法定理と 2 倍角の公式より

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta) \\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \end{aligned} \tag{12.30}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta) \\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta \\ &= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta \\ &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \end{aligned} \tag{12.31}$$

が求まる。

7. 上の式で $n=1$ の時は自明だろう。$n=2$ の時は

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^2 &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta \\
&= \sin 2\theta + \cos 2\theta
\end{aligned}
\tag{12.32}
$$

となり、この実部と虚部を比較すれば 2 倍角の公式がでる。$n=3$ とすれば同様に

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^3 &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) \\
&= \cos 3\theta + i\sin 3\theta
\end{aligned}
\tag{12.33}
$$

となり、この実部と虚部を比較すれば 3 倍角の公式がでる。

12.3 まとめ

こうして多くの公式は加法定理から導出できる事を見た。これで教科書に大量に載っている公式を無駄に暗記する必要は無くなった。この分野には限らないが、『定義』は考えても出てこないので覚えるしかない。しかし『公式』は知っていると便利だが始めから暗記するべきものではない。具体的な問題を解く中で良く使うものについては覚えてゆけば十分であるし、その様に有るべきだ。

索引